

0017–9310(94)00119–7

Résolution d'un problème inverse multidimensionnel de diffusion de la chaleur par la méthode des éléments analytiques et par le principe de l'entropie maximale

FERNANDO M. RAMOS

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, Laboratório de Integração e Testes, CP 515,
12201 São José dos Campos, Brésil

et

ANDRÉ GIOVANNINI

Université Paul Sabatier, UFR MIG. Département de Mécanique, 118 Route de Narbonne,
31062 Toulouse, France

(Received 16 September 1993 and in final form 11 April 1994)

Résumé—A partir d'un ensemble incomplet et bruité de données, une méthode de reconstruction tomographique d'une distribution 3D de défauts, situés au sein d'un solide, est présentée. Le problème direct associé est résolu numériquement par la méthode des éléments analytiques, en utilisant un schéma implicite à directions alternées. Un algorithme itératif d'optimisation avec contraintes, associé à une technique de régularisation basée sur le principe de l'entropie maximale, est utilisé pour résoudre le problème inverse. Des résultats numériques, obtenus à partir des données simulées par le modèle direct et ensuite bruitées, attestent la bonne performance de la méthode de reconstruction proposée.

INTRODUCTION

A l'heure actuelle l'emploi des matériaux composites se généralise rapidement dans des domaines aussi divers que le nucléaire, l'aéronautique, l'espace ou la micro-électronique. En particulier, dans l'industrie aérospatiale, les matériaux composites sont utilisés dans toutes les applications où le rapport entre les propriétés mécaniques et la masse volumique doit être le plus favorable possible. Il y a donc un grand intérêt à pouvoir modéliser le comportement thermique des matériaux composite, qui reste d'ailleurs encore mal maîtrisé [1]. Au plan expérimental, les contraintes en vue d'assurer l'intégrité et la qualité de pièces structurales en matériaux composites sont à l'origine de plusieurs programmes de recherche dans le domaine des contrôles non-destructifs (CND).

A partir de la dernière décennie, les développements de l'optique ont conduit à de nouvelles techniques de contrôle, dénommées méthodes photothermiques, appliquées avec succès aux revêtements [2], films minces [3] et matériaux multicouches [4]. Dans ces méthodes, les variations du champ pariétal des températures entraînées par l'application d'un flux de chaleur impulsif ou périodique, détectées par un radiomètre infrarouge, permettent de caractériser certaines des propriétés physiques de l'échantillon ainsi

que de détecter d'éventuels défauts dans sa structure interne.

Le travail présenté dans cet article doit être intégré aux recherches relatives au CND des matériaux composites multicouches par thermographie infrarouge. Plus précisément, nous avons résolu le problème inverse de diffusion instantané concernant la reconstruction tomographique d'une distribution 3D des défauts, non-observables directement, à partir d'un ensemble incomplet et bruité d'images thermographiques, fruit d'une expérience photothermique de CND. Les défauts, représentant des délaminages ou des inclusions minces, sont simulés dans le modèle mathématique par des conductances thermiques de contact non-capacitives, latéralement distribuées entre les strates successives du multicouche. La méthode de reconstruction proposée fait appel à un algorithme itératif d'optimisation non-linéaire avec contraintes associé à une technique de régularisation basée sur le principe de l'entropie maximale.

Etant donné que la résolution d'un problème inverse passe nécessairement par la résolution du problème *direct* correspondant, nous présentons également la modélisation du transfert thermique instantané dans une structure 3D plane multicouche orthotrope. Bien que cette géométrie soit relativement simple, la présence des défauts de taille limitée entre les

NOMENCLATURE

C	matrice des coefficients, équations (32)–(34)	R(p)	somme des écarts quadratiques, équation (37)
C_i	chaleur massique [$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$]	S(p)	fonctionnelle régularisante, équation (41)
C_{j-1}, C_{j+1}	coefficients, équations (20) et (21)	t, t'	temps [s]
$\bar{F}_{j,n}^{m-1}, F_j^{m-1}$	fonctions, équations (27) et (28)	T	température [K]
h_1, h_{l+1}	coefficients de transfert thermique [$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$]	x, y, z	coordonnées d'espace [m]
h_i	conductance thermique de contact [$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$]	Y	vecteur des données.
k	conductivité thermique [$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$]	Symboles grecs	
l	nombre total de couches	α	diffusivité thermique [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]
J	nombre total de noeuds dans la direction x	γ	paramètre de régularisation
J_c	nombre de noeuds par couche dans la direction x	Δt	pas de temps
J_y	fonction objectif, équation (35)	$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	paramètres de la grille
K	nombre total de noeuds dans la direction y	ε_{rms}	écart rms, équation (43)
l_q, u_q	contraintes d'optimisation	λ_n	n ème valeur propre
L	nombre total de noeuds dans la direction z	ξ	coordonnée d'espace
L_x, L_y, L_z	paramètres géométriques	ρ	masse volumique [kg m^{-3}]
M	nombre total d'images infrarouges	σ	variance du bruit de mesure
N	nombre total de valeurs propres	$\psi_{j,n}$	n ème fonction propre
$N_{j,n}$	intégrale de normalisation de la n ème fonction propre, équation (25)	Ψ	fonction, équations (29)–(31).
N_{obs}	nombre d'observations expérimentales	Indices inférieurs	
p	vecteur solution	i	numéro de couche
P	vecteur des termes sources, équations (32)–(34)	j, j_c, k, l	indices d'espace
P_j^{m-1}	terme source, équation (22)	n	ordre de la valeur propre
Q	dimension du problème inverse	q	indice du vecteur solution
$R^{(l)}$	l ème région élémentaire, Fig. 3	x, y, z	indices de direction.
		Indices supérieurs	
		$(j), (k), (l)$	indices des régions élémentaires
		m	indice du pas de temps
		r	numéro d'iteration.

couches met le problème hors de portée des méthodes analytiques classiques. Alors, afin de combiner la précision des techniques analytiques et la souplesse des méthodes numériques discrètes, nous avons résolu le problème direct par une méthode numérique hybride, la méthode des éléments analytiques [*finite analytic* (FA) method], associée à un schéma de calcul implicite à directions alternées (ADI).

FORMULATION MATHÉMATIQUE

Problème direct

Considérons une structure composite plane de dimensions ($L_x \times L_y \times L_z$), constituée par I couches parallèles d'épaisseur $\delta x_i = x_{i+1} - x_i$, comme illustré par la Fig. 1. Chaque couche est homogène, orthotrope et peut avoir des propriétés physiques différentes des celles de couches adjacentes. Les conductances thermiques de contact interfaciales h_i peuvent varier

selon les directions y et z . Pour $t > 0$, des conditions de type mixte sont imposées aux frontières. Il n'y a pas de sources de chaleur volumiques dans les milieux.

Dans la couche i du composite, $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, $i = 1, \dots, I$, l'équation de la diffusion de la chaleur s'écrit alors

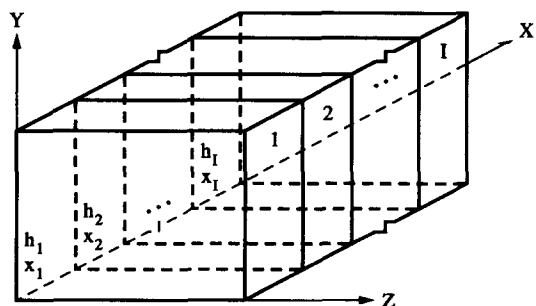


Fig. 1. Schéma de la structure multicouche.

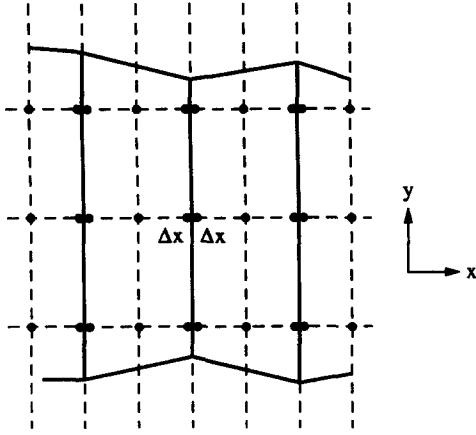


Fig. 2. Grille de discrétisation.

$$k_{xi} \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + k_{yi} \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} + k_{zi} \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} = \rho_i C_i \frac{\partial T_i}{\partial t} \quad (1)$$

$T_i(x, y, z, t)$ étant la température dans la couche i , ρ_i la masse volumique, C_i la chaleur massique et k_{xi} , k_{yi} , k_{zi} les conductivités thermiques dans les directions x , y et z . Sur les faces externes les conditions aux limites s'écrivent

$$-k_{xi} \frac{\partial T_i}{\partial x} + h_i T_i = f_1(t) \quad (2)$$

$$k_{xi} \frac{\partial T_i}{\partial x} + h_{i+1} T_i = f_{i+1}(t) \quad (3)$$

en $x = x_1 = 0$ et $x = x_{i+1} = L_x$;

$$-k_{yi} \frac{\partial T_i}{\partial y} + h_y T_i = f_y(t) \quad (4)$$

$$k_{yi} \frac{\partial T_i}{\partial y} + h_y T_i = f_y(t) \quad (5)$$

en $y = 0$, $y = L_y$, et $x_i \leq x \leq x_{i+1}$; et

$$-k_{zi} \frac{\partial T_i}{\partial z} + h_z T_i = f_z(t) \quad (6)$$

$$k_{zi} \frac{\partial T_i}{\partial z} + h_z T_i = f_z(t) \quad (7)$$

en $z = 0$, $z = L_z$ et $x_i \leq x \leq x_{i+1}$.

Les conditions de raccordement aux interfaces s'écrivent

$$-k_{xi} \frac{\partial T_i}{\partial x} = h_{i+1} (T_i - T_{i+1}) \quad (8)$$

$$k_{xi} \frac{\partial T_i}{\partial x} = k_{xi+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x} \quad (9)$$

en $x = x_{i+1}$.

Enfin, pour $t = 0$, la condition initiale est

$$T_i(x, y, z, t) = F_i(x, y, z). \quad (10)$$

Discrétisation et données expérimentales

Le domaine de calcul est discrétisé de manière à constituer une grille uniforme au niveau des strates du composite, comme illustré par la Fig. 2, comportant

$(J_c \times K \times L)$ noeuds par couche et $(J \times K \times L)$ noeuds au total, où $J = J_c \times I$. Ainsi, la température au point $(j_c \Delta x, k \Delta y, l \Delta z)$ de la couche i à l'instant $m \Delta t$, s'écrit

$$T_i(j_c \Delta x, k \Delta y, l \Delta z, m \Delta t) \equiv T_{jkl}^m \quad (11)$$

où $j = (i-1)J_c + j_c$, et la conductance de contact au point $(k \Delta y, l \Delta z)$ de l'interface entre les couches $i-1$ et i est donnée par

$$h_i(k \Delta y, l \Delta z) \equiv h_{ikl}, \quad i = 2, \dots, I. \quad (12)$$

Les données expérimentales sont stockées dans des séquences de M images infrarouges de la face du composite soumise à une impulsion thermique (face avant), enregistrées en t^m , $m = 1, \dots, M$. Chaque image est constituée par une mosaïque de $(K \times L)$ pixels, de sorte qu'on peut associer au pixel $(k \times l)$ de l'image m , la mesure expérimentale Y_{kl}^m .

Problème inverse

Si l'on dénote \mathbf{p} le vecteur solution recherché, le problème inverse consiste à déterminer $\mathbf{p} \in P$ tel que

$$Y_{kl}^m = T_{jkl}^m \quad (13)$$

pour tout k, l et m , où

$$\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_q, \dots, p_{Q-1}, p_Q\} \\ = \{h_{211}, h_{212}, \dots, h_{ikl}, \dots, h_{IKL-1}, h_{IKL}\} \quad (14)$$

et

$$q = KL(i-2) + K(l-1) + k. \quad (15)$$

P étant l'espace de solutions admissibles et T_{jkl}^m la température de la face avant de la structure multicouche, obtenue par la résolution du problème direct.

Malheureusement, cette formulation, basée sur une parfaite identité entre le modèle direct et l'expérience, ne permet pas la mise en oeuvre d'une méthode fiable d'inversion, en raison du bruit de mesure présent dans le vecteur des données \mathbf{Y} . L'exacte vérification de cette contrainte équivaut à interpréter le bruit comme un signal ayant un rapport réel avec la physique du problème, conduisant inévitablement à l'introduction des structures parasites ou des artefacts dans la solution. En effet, la présence de bruit dans les données expérimentales représente une perte irréversible d'information qui rend donc impossible une reconstruction tomographique exacte des défauts. Une formulation appropriée pour le problème inverse ci-dessus sera présentée et discutée en détail dans les sections suivantes.

RESOLUTION DU PROBLEME DIRECT

Principe de la méthode FA

La méthode des éléments analytiques (FA) a été développée par Chen *et al.* [5-7] et utilisée dans la résolution de problèmes en mécanique des fluides et transfert de chaleur. Elle a été récemment étendue aux problèmes de diffusion en régime instationnaire dans

les matériaux composites multicouches par Ramos et Giovanni [8].

L'idée de base de la méthode FA est d'introduire une solution analytique locale dans la solution numérique des équations différentielles, réduisant ainsi l'erreur de troncature dans l'approximation aux différences finies ou éliminant l'usage d'une fonction d'interpolation dans la méthode des éléments finis. La méthode FA décompose le domaine de calcul en éléments discrets, dans lesquels la solution analytique est obtenue aisément à cause de la simplicité de la géométrie et des conditions aux limites. La solution numérique du problème complet est obtenue en assemblant et recouvrant toutes les solutions analytiques locales qui relient un noeud interne à tous ses voisins.

Mise en oeuvre numérique

La mise en oeuvre du modèle direct par l'application de la méthode FA, décrite en détail dans les refs. [9, 10], comporte quatre étapes principales:

- décomposition de l'équation de la diffusion instationnaire 3D en un triplet d'équations monodimensionnelles découplées, en utilisant le schéma de désintégration de Yanenko [11];
- discretisation du domaine de calcul régions élémentaires 1D $R^{(j)}$ $\{j = 1, \dots, J\}$, $R^{(k)}$ $\{k = 1, \dots, K\}$ et $R^{(l)}$ $\{l = 1, \dots, L\}$, dans les directions x , y et z , respectivement;
- dérivation des solutions analytiques locales, dans les régions élémentaires;
- assemblage et recouvrement de toutes les solutions analytiques locales, selon les trois directions orthogonales.

Le champ complet de températures T_{jkl}^m , à l'instant t^m , est obtenu par le balayage successif de toutes les lignes j , k et l de la grille de discrétisation, de façon similaire à celle utilisée dans les méthodes à pas fractionnaire classiques.

Solution numérique globale

Considérons $T_j(\xi, t)$, la solution de l'équation de la diffusion dans une région élémentaire $R^{(j)}$, illustrée par la Fig. 3. Si l'on évalue $T_j(\xi, t)$ au point ξ_j et en $t = t^m = m\Delta t$, en exprimant la condition initiale et les conditions aux limites en fonction des valeurs nodales adjacentes, soit†

$$T^{m-1}(\xi) = f(T_{j-1}^{m-1}, T_j^{m-1}, T_{j+1}^{m-1}, \xi) \quad (16)$$

$$T_{j-1}(t) = f(T_{j-1}^{m-1}, T_j^m, t) \quad (17)$$

et

$$T_{j+1}(t) = f(T_{j+1}^{m-1}, T_j^m, t) \quad (18)$$

alors le schéma numérique implicite, à six points, reliant T_j^m aux valeurs nodales voisines correspond à

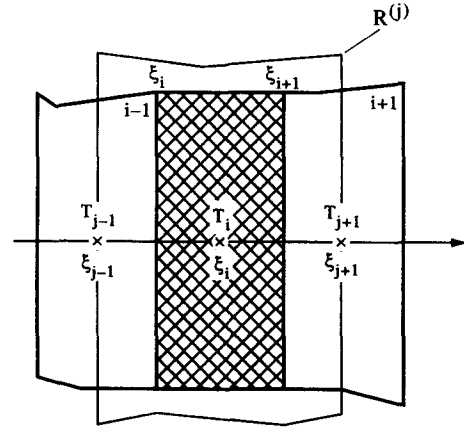


Fig. 3. Schéma d'un élément de discrétisation.

$$T_j^m = C_{j-1} T_{j-1}^m + C_{j+1} T_{j+1}^m + P_j^{m-1} \quad (19)$$

où les coefficients des termes implicites sont donnés par

$$C_{j-1} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \Delta t}}{N_{j,n}} \psi_{j,n}(\xi_j) \left(k_{xj} \frac{d\psi_{j,n}}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_{j-1}} \times \int_0^{\Delta t} e^{\lambda_n^2 t'} t' dt' \quad (20)$$

$$C_{j+1} = -\frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \Delta t}}{N_{j,n}} \psi_{j,n}(\xi_j) \left(k_{xj} \frac{d\psi_{j,n}}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_{j+1}} \times \int_0^{\Delta t} e^{\lambda_n^2 t'} t' dt' \quad (21)$$

et le terme de source par

$$P_j^{m-1} = \left(\frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \Delta t}}{N_{j,n}} \psi_{j,n}(\xi_j) \left(k_{xj} \frac{d\psi_{j,n}}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_{j-1}} \times \int_0^{\Delta t} e^{\lambda_n^2 t'} (\Delta t - t') dt' \right) T_{j-1}^{m-1} - \left(\frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \Delta t}}{N_{j,n}} \psi_{j,n}(\xi_j) \left(k_{xj} \frac{d\psi_{j,n}}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_{j+1}} \times \int_0^{\Delta t} e^{\lambda_n^2 t'} (\Delta t - t') dt' \right) T_{j+1}^{m-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \Delta t}}{N_{j,n}} \psi_{j,n}(\xi_j) \bar{F}_{j,n}^{m-1} \quad (22)$$

avec

$$\lambda_{j,n} = \sqrt{\alpha_j} \frac{n\pi}{2\delta\xi_j} \quad (23)$$

$$\psi_{j,n}(\xi) = \sin \left[\frac{n\pi}{\delta\xi_j} (\xi - \xi_{j-1}) \right] \quad (24)$$

† Par souci de simplification, les indices k et l ont été supprimés.

$$N_{j,n} = \frac{\delta \xi_j}{2} \quad (25)$$

et

$$\delta \xi_j = \xi_{j+1} - \xi_{j-1}. \quad (26)$$

Le terme $\bar{F}_{j,n}^{m-1}$ est déterminé par l'expression

$$\bar{F}_{j,n}^{m-1} = \int_{R^{(j)}} \frac{k_{xj}}{\alpha_{xj}} \psi_{j,n}(\xi) F_j^{m-1}(\xi) d\xi \quad (27)$$

où la fonction $F_j^{m-1}(\xi)$ est approximée par un polynôme de Lagrange d'ordre 2 passant par les noeuds T_{j-1}^{m-1} , T_j^{m-1} et T_{j+1}^{m-1} :

$$F_j^{m-1}(\xi) = \Psi_{j-1}(\xi) T_{j-1}^{m-1} + \Psi_j(\xi) T_j^{m-1} + \Psi_{j+1}(\xi) T_{j+1}^{m-1} \quad (28)$$

où

$$\Psi_{j-1}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_j)(\xi - \xi_{j+1})}{(\xi_{j-1} - \xi_j)(\xi_{j-1} - \xi_{j+1})} \quad (29)$$

$$\Psi_j(\xi) = \frac{(\xi - \xi_{j-1})(\xi - \xi_{j+1})}{(\xi_j - \xi_{j-1})(\xi_j - \xi_{j+1})} \quad (30)$$

$$\Psi_{j+1}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_{j-1})(\xi - \xi_j)}{(\xi_{j+1} - \xi_{j-1})(\xi_{j+1} - \xi_j)}. \quad (31)$$

La dérivation des relations algébriques similaires pour les éléments $R^{(1)}$ et $R^{(j)}$, contigus aux frontières du domaine de calcul, permet d'incorporer les conditions aux limites du problème, dans la solution numérique globale. Les relations de fermeture couplant les solutions locales dans les régions élémentaires adjacentes à un même point de l'interface entre deux strates du composite sont obtenues par différences finies, à partir des conditions de raccordement interfaciales en température et en flux, données par les équations (8) et (9).

La solution du problème complet résulte de l'assemblage de toutes les solutions locales selon les trois directions orthogonales et s'écrit, sous forme matricielle,

$$C_j \mathbf{T}_j^* = \mathbf{P}_j^{m-1} \quad (32)$$

$$C_k \mathbf{T}_k^{**} = \mathbf{P}_k^* \quad (33)$$

$$C_l \mathbf{T}_l^m = \mathbf{P}_l^{**} \quad (34)$$

où C_j , C_k et C_l sont les matrices tridiagonales des coefficients des termes implicites. \mathbf{T}_j , \mathbf{T}_k et \mathbf{T}_l les vecteurs température et \mathbf{P}_j , \mathbf{P}_k et \mathbf{P}_l les vecteurs source.

RESOLUTION DU PROBLEME INVERSE

Position du problème

La détermination des caractéristiques géométriques et physiques d'un défaut situé à l'intérieur d'une pièce, à partir des mesures prises à sa surface, est un problème appartenant à la famille des problèmes inverses, dont la nature mal posé se traduit par l'instabilité des solutions vis-à-vis des faibles variations des données

initiales. Alors, une approche naturelle pour traiter ce genre de problème consiste à déterminer le vecteur solution \mathbf{p} au sens de moindres carrés, en minimisant l'écart quadratique entre le modèle direct et les données expérimentales. Cependant, cette approche n'est pas entièrement satisfaisante car elle ne permet pas la prise en compte dans la procédure d'inversion de toute information *a priori* éventuellement disponible concernant les caractéristiques du problème traité. En effet, les solutions recherchées sont souvent associées à des contraintes quantitatives ou qualitatives (positivité, degré de lissage de la solution, etc.) qui permettent de restreindre l'espace des solutions admissibles du problème.

Ces différents aspects nous conduisent à présenter le problème inverse comme un problème d'optimisation non linéaire avec contraintes, dont la formulation s'écrit:

$$\min \{J_\gamma(\mathbf{p})\}_{\mathbf{p} \in P} \quad l_q \leq p_q \leq u_q \quad q = 1, \dots, Q \quad (35)$$

où

$$J_\gamma(\mathbf{p}) = R(\mathbf{p}) - \gamma S(\mathbf{p}) \quad (36)$$

$$R(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M [Y_{kl}^m - T_{lkm}(\mathbf{p})]^2. \quad (37)$$

$R(\mathbf{p})$ mesure la somme des écarts quadratiques entre le modèle et l'expérience, $S(\mathbf{p})$ est une fonctionnelle régularisante et $\gamma > 0$ est le paramètre de régularisation. L'utilisation d'une approche entropique pour le choix de $S(\mathbf{p})$ sera discutée dans la section suivante.

Régularisation par maximisation d'entropie

L'entropie est une notion familière en thermodynamique, en mécanique et en théorie de l'information. Ce furent Maxwell, Boltzmann et Gibbs qui, en jetant les bases de la thermodynamique statistique, donnèrent les premiers une interprétation probabilistique de cette grandeur. En 1949, Shannon et Weaver [12] établirent le lien entre les concepts d'information et d'entropie, en cherchant à évaluer quantitativement, l'incertitude qu'il est possible d'attribuer à la formation d'une suite particulière.

Le principe de l'entropie maximale (EM), proposé comme une méthode d'inférence par Jaynes [13], découle directement de cette dualité information/entropie. Développé à partir des considérations quelque peu subjectives, le principe EM a reçu un cadre théorique rigoureux avec les travaux de Shore et Johnson [14] et de Tikochinsky *et al.* [15]. Depuis son apparition en 1957, cette méthode a été appliquée dans des domaines aussi divers que la radioastronomie [16], la tomographie [17], le traitement d'images [18], la reconnaissance de formes [19] ou encore la cristallographie [20].

Les avantages de l'approche entropique sont notamment, le respect automatique de la contrainte de positivité et, surtout, le choix préférentiel des reconstructions; parmi toutes celles compatibles avec les

données du problème; qui possèdent la structure la moins informative, c'est-à-dire la moins complexe. Ce dernier point est particulièrement important puisqu'il permet de réduire l'apparition des structures parasites associées au bruit de mesure, dans la solution inverse.

Le choix de la fonctionnelle de régularisation $S(\mathbf{p})$ par le principe EM utilise comme point de départ la formulation discrète du problème inverse, présentée précédemment. Si l'on note N le nombre total d'éléments Δp discrets du vecteur de paramètres \mathbf{p} , distribués au hasard sur Q points de la grille de discrétisation, et N_q le nombre d'éléments Δp au point q , tel que l'on ait

$$p_q = N_q \Delta p \quad (38)$$

$$N = \sum_{q=1}^Q N_q \quad (39)$$

et

$$s_q = \frac{N_q}{N} = \frac{p_q}{\sum_{q=1}^Q p_q} \quad (40)$$

alors, la fonctionnelle de régularisation est donnée par

$$S(\mathbf{p}) = - \sum_{q=1}^Q s_q \log s_q. \quad (41)$$

Due à l'inexistence de critères analytiques, la détermination du paramètre de régularisation nécessite, en général, un certain degré d'expérimentation numérique. Le choix de γ dépend essentiellement de l'information disponible sur les données expérimentales et peut, donc, être effectué en fonction de la valeur prise par le résidu $R(\hat{\mathbf{p}})$, où $\hat{\mathbf{p}}$ denote le vecteur solution estimé. Alors, si la statistique du bruit de mesure peut être approximée par une gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type σ constant, l'approche la plus simple pour la détermination du paramètre de régularisation, consiste à choisir la valeur de γ qui vérifie au mieux la condition

$$R(\hat{\mathbf{p}}) \approx E\{R(\mathbf{p})\} = N_{\text{obs}} \sigma^2 \quad (42)$$

où $N_{\text{obs}} = KLM$ est le nombre total d'observations et $E\{\cdot\}$ est l'opérateur d'espérance mathématique. Dans la pratique, la détermination de γ est facilitée par le fait que la solution estimée reste relativement inchangée pour des larges plages de la valeur du paramètre de régularisation.

Algorithme d'optimisation

Etant donnée la nature non linéaire du problème inverse défini par les équations (35) à (37), la recherche d'un maximum pour la fonction objectif $J_\gamma(\mathbf{p})$ s'effectue de façon itérative, avec l'aide d'un algorithme d'optimisation quasi newtonien à métrique variable de la bibliothèque NAG [21]. Les principaux pas de la procédure d'inversion sont les suivants:

(1) au point de départ, choisir un vecteur de par-

amètres initial \mathbf{p}^0 et poser $\mathbf{H}^0 = \mathbf{I}$, où \mathbf{H} est une approximation de l'inverse du hessien et \mathbf{I} la matrice d'identité;

(2) à l'itération r ,

(a) calculer

$$\mathbf{H}^r = \mathbf{H}^{r-1} + \frac{\delta^r \delta^{rT}}{\delta^{rT} \zeta^r} + \frac{\mathbf{H}^{r-1} \zeta^r \zeta^{rT} \mathbf{H}^{r-1}}{\zeta^{rT} \mathbf{H}^{r-1} \zeta^r}$$

où

$$\delta^r = \mathbf{p}^r - \mathbf{p}^{r-1}$$

$$\zeta^r = \nabla J_\gamma(\mathbf{p}^r) - \nabla J_\gamma(\mathbf{p}^{r-1});$$

(b) résoudre le problème direct pour \mathbf{p}^r et déterminer la fonction objectif $J_\gamma(\mathbf{p}^r)$;

(c) calculer par différences finies le gradient $\nabla J_\gamma(\mathbf{p}^r)$;

(d) déterminer la direction de déplacement $\mathbf{d}^r = -\mathbf{H}^r \nabla J_\gamma(\mathbf{p}^r)$;

(e) calculer $\mathbf{p}^{r+1} = \mathbf{p}^r + \alpha^r \mathbf{d}^r$, où α^r maximise $J_\gamma(\mathbf{p}^r + \alpha \mathbf{d}^r)$;

(3) $r \leftarrow r+1$, tester la convergence puis arrêt ou retour en 2.

RESULTATS NUMERIQUES

Afin d'évaluer les performances de la méthode d'inversion proposée ci-dessus, nous l'avons testée numériquement, en utilisant des données expérimentales simulées par le modèle direct et contaminées par du bruit aléatoire gaussien d'écart-type σ . Tous les calculs ont été initialisés par le vecteur $\mathbf{p}^0 \equiv \{p_q^0 = l_q, q = 1, \dots, Q\}$, où l_q est la limite inférieure de variation des paramètres. Les contraintes d'optimisation ont été fixés en $l_q = 1 \times 10^2$ et $u_q = 1 \times 10^8 SI$.

Cas 1D

Le premier cas test concerne un mur 1D composite constitué par 10 couches homogènes de même matériau ($k = 0.67 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\alpha = 2.2 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$) de $\delta = 0.3 \text{ mm}$ d'épaisseur chacune. Les conditions aux limites sont de type mixte ($h = 10 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$). En $t > 0$, la face avant du composite ($x = 0$) est soumise à une impulsion thermique uniforme sous forme de créneau, d'une durée de 1.6 s et avec une densité de flux de 4500 W m^{-2} . L'analyse inverse a pour but la détermination du vecteur des paramètres \mathbf{p}_{ex} représentant les conductances thermiques de contact entre les différentes couches du composite, situées respectivement en $x_q = q\delta$, $q = 1, \dots, 9$.

Influence du bruit de mesure. Le Tableau 1 représente les valeurs du vecteur solution \mathbf{p}_{ex} ainsi que les résultats des calculs numériques. Lorsque $\gamma = 0$ et que l'on augmente le niveau de bruit, on observe que l'algorithme converge vers des solutions distinctes, de plus en plus éloignées de la solution exacte recherchée. La Fig 4 présente aussi la variation du rapport

Tableau 1. Influence du bruit de mesure

q	$1/p_{ex}$	$1/p_{\sigma=0}$	$1/p_{\sigma=0.025}$	$1/p_{\sigma=0.100}$
1	1.00E-08	1.00E-08	1.00E-08	1.00E-08
2	1.00E-08	1.00E-08	1.00E-08	1.00E-08
3	1.00E-08	1.00E-08	1.00E-08	2.10E-05
4	1.00E-03	1.00E-03	8.89E-04	9.24E-04
5	1.00E-08	1.00E-08	1.37E-04	1.00E-08
6	1.00E-08	1.00E-08	1.00E-08	1.00E-08
7	1.00E-08	1.00E-08	1.00E-08	1.00E-08
8	1.00E-08	1.00E-08	1.00E-08	3.14E-04
9	1.00E-08	1.00E-08	1.00E-08	1.00E-08
$R(\mathbf{p})$		1.12E-19	7.45E-02	1.03E+00
$N_{obs}\sigma^2$		0.00E+00	6.25E-02	1.00E+00

$$\frac{\epsilon_{rms}^r}{\epsilon_{rms}^0} = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^Q (p_q^r - p_{q,ex})^2}{\sum_{q=1}^Q (p_q^0 - p_{q,ex})^2}} \quad (43)$$

en fonction du numéro de l'itération r , pour différentes valeurs de l'écart-type du bruit. Pour $\sigma \neq 0$, on constate qu'après une courte phase initiale, la précision de la solution inverse se dégrade, au fur et à mesure que le nombre d'itérations augmente. Cette caractéristique, qui visualise l'insuffisance de la méthode des moindres carrés classique ($\gamma = 0$), résulte du fait que l'algorithme, en cherchant à minimiser le résidu $R(\mathbf{p})$, introduit dans le vecteur solution des structures parasites liées essentiellement au bruit de mesure, et qui n'ont donc aucun rapport avec la physique du problème étudié.

Influence du paramètre de régularisation γ . La variation du rapport $\epsilon_{rms}^r/\epsilon_{rms}^0$ en fonction du numéro de l'itération r , pour $\gamma = 0, 0.1$ et 0.001 est représentée sur la Fig. 5, alors que le Tableau 2 donne les vecteurs solution. On observe que même si les trois solutions inverses calculées reproduisent l'allure générale du vecteur des paramètres recherché, les meilleurs résultats

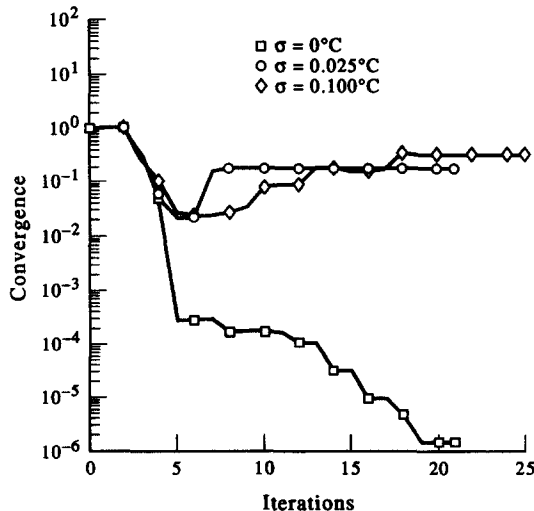


Fig. 4. Influence du bruit sur la convergence de l'algorithme d'inversion.

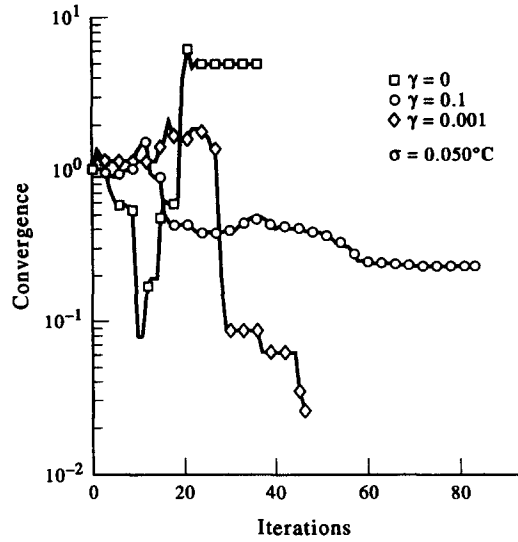


Fig. 5. Influence du paramètre de régularisation sur la convergence de l'algorithme d'inversion.

ont été obtenus pour $\gamma > 0$. En effet, l'utilisation d'un terme de régularisation dans la procédure d'inversion permet d'assurer une décroissance à peu près régulière et monotone de l'erreur, aux dépens d'une convergence initiale plus lente et d'un résidu $R(\mathbf{p})$ final plus important. Aussi, il est à remarquer l'aspect excessivement lissé du vecteur $\mathbf{p}_{\gamma=0.1}$. Cela indique une perte de consistance de la solution inverse par rapport aux données expérimentales, en raison de l'emploi d'une valeur trop forte du paramètre de régularisation lors de la procédure d'inversion. Enfin, pour $\gamma = 0.001$, on observe la présence de quelques structures parasites dues au bruit, dans la solution inverse. Ce résultat indique que l'utilisation des valeurs de γ choisies dans l'intervalle $0.001 < \gamma < 0.1$ peut conduire, en moyenne, à des reconstructions plus précises.

Influence du nombre d'observations N_{obs} . Dans la résolution d'un problème inverse, une condition nécessaire évidente (mais pas suffisante) d'unicité est

Tableau 2. Influence du paramètre de régularisation γ

q	$1/p_{ex}$	$1/p_{\sigma=0}$	$1/p_{\sigma=0.001}$	$1/p_{\sigma=0.100}$
1	1.00E-08	2.51E-06	1.25E-06	3.04E-06
2	1.00E-08	1.00E-08	7.50E-08	2.87E-06
3	5.00E-04	7.00E-04	4.97E-04	6.37E-04
4	1.00E-03	6.26E-04	1.00E-03	7.81E-04
5	1.00E-08	1.00E-08	4.14E-08	3.03E-06
6	1.00E-08	1.00E-08	2.45E-08	3.03E-06
7	1.00E-08	1.00E-08	1.85E-08	3.03E-06
8	1.00E-08	1.00E-08	4.31E-08	3.03E-06
9	1.00E-08	5.51E-03	5.13E-08	3.03E-06
$R(\mathbf{p})$		3.26E-01	3.35E-01	3.29E-01
$N_{obs}\sigma^2$		1.50E-01	1.50E-01	1.50E-01
$S(\mathbf{p})/S_{max}$		7.35E-01	7.68E-01	8.89E-01

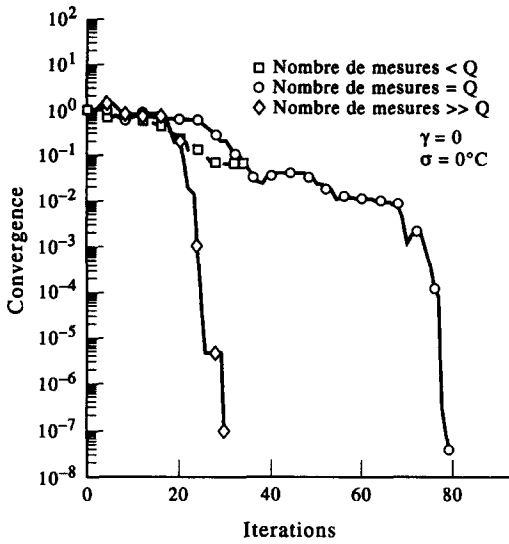


Fig. 6. Influence du nombre d'observations expérimentales sur la convergence de l'algorithme d'inversion.

celle qui stipule que le nombre total d'observations expérimentales indépendantes N_{obs} soit égale ou supérieure au nombre de paramètres à estimer Q . Les essais dont les résultats sont reproduits sur la Fig. 6 ont été obtenus avec $\gamma = 0$ et des données d'entrée non bruitées. On observe que pour $N_{\text{obs}} = 9 = Q$ et $N_{\text{obs}} = 100 \gg Q$, l'algorithme converge vers la solu-

tion inverse recherchée, mais le surdimensionnement du nombre d'observations dans le dernier cas a permis une accélération notable de la vitesse de convergence.

Cas 3D

Ce deuxième exemple concerne la reconstruction d'un délaminage en forme de croix, caractérisé par une résistance de contact $R_c = 1 \times 10^{-3} SI$, situé dans une plaque plane multicouche ($30 \times 30 \times 1.5$ mm), à une profondeur de 0.60 mm, entre les deuxième et troisième strates. Le composite est en effet constitué par cinq couches homogènes et orthotropes d'épaisseur unitaire 0.3 mm. Les conductivités et les diffusivités thermiques radiales et axiales sont définies respectivement par $k_{\text{rad}} = 10 \times k_{\text{axi}} = 6.7 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ et $\alpha_{\text{rad}} = 10 \times \alpha_{\text{axi}} = 2.2 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. La solution exacte recherchée est illustrée par la représentation 3D visualisant l'intensité du défaut R_c en fonction des coordonnées y et z (Fig. 7). Les calculs ont été réalisés à partir de thermogrammes simulés par la résolution du problème direct. A ces résultats, il a été additionné un bruit gaussien de moyenne nulle et d'écart-type $\sigma = 0.05^\circ\text{C}$, dans le but de simuler l'incertitude sur la valeur du thermosignal issu d'une caméra infrarouge (σ étant la valeur du bruit de mesure NETD à 30°C). Les Figs. 8 et 9 représentent deux reconstructions 3D du délaminage obtenues respectivement après 50 et 250 itérations, le paramètre γ ayant été fixé égal à 2.

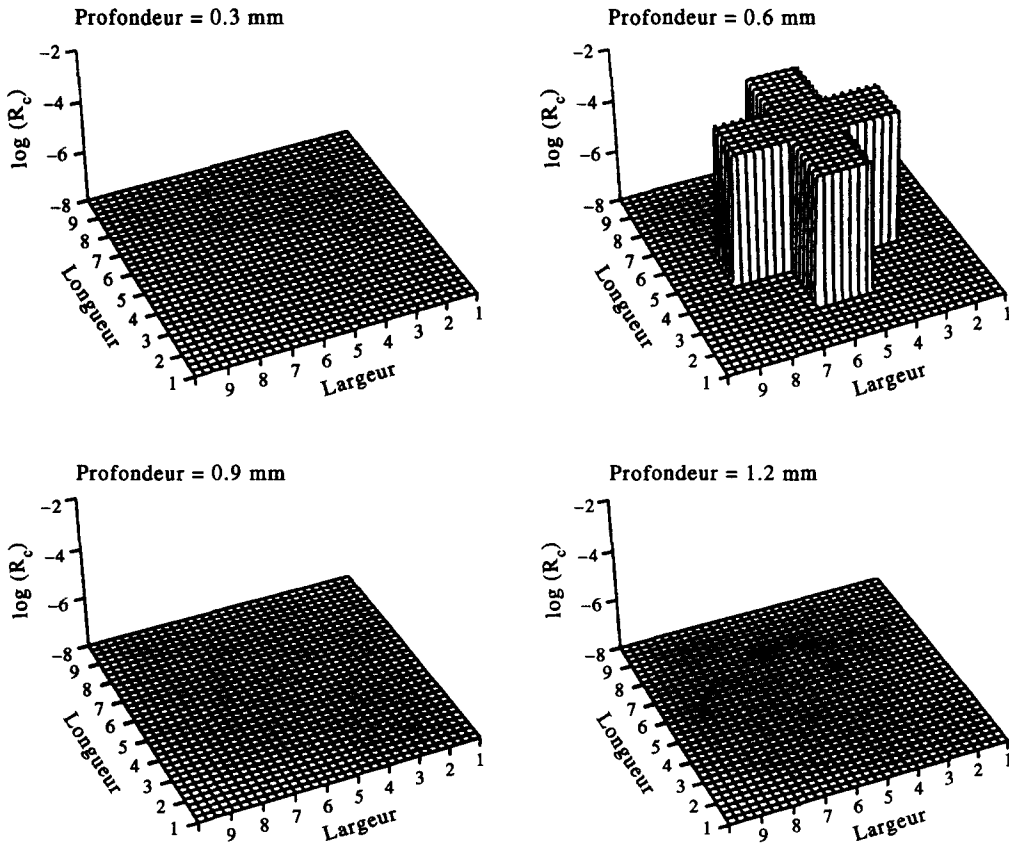


Fig. 7. Solution exacte recherchée.

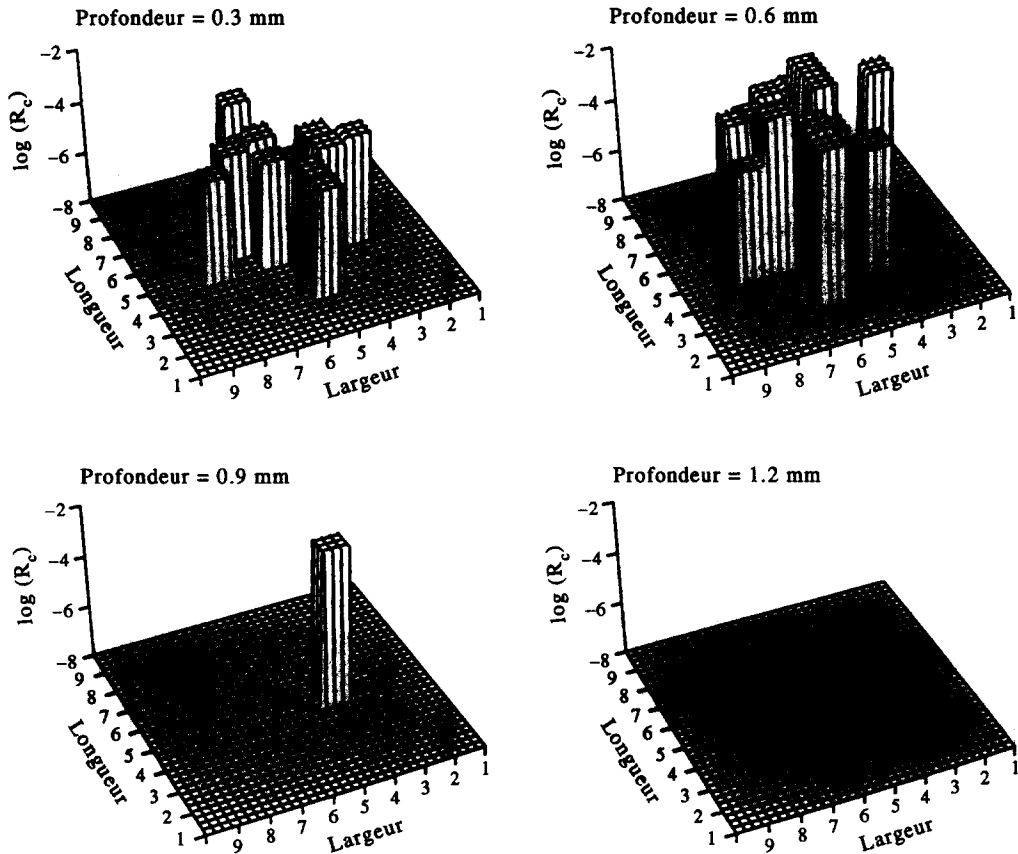


Fig. 8. Reconstruction après 50 itérations.

Cette valeur a été choisie en augmentant la limite supérieure de γ , déterminée pour le cas 1D, dans la même proportion de la variation de $N_{\text{obs}}\sigma^2$ entre les exemples 1D et 3D (à-peu-près 20 fois). On remarque qu'en dépit de la présence d'artefacts, on évolue vers un excellent accord entre le vecteur de paramètres recherché et la solution inverse obtenue après 250 itérations.

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons présenté une méthode d'inversion permettant la reconstitution d'une distribution tridimensionnelle, représentant des défauts dans un matériau composite multicouches, à partir d'un ensemble bruité et incomplet de données expérimentales.

Le problème inverse, formulé comme un problème d'optimisation non linéaire avec contraintes, a été résolu itérativement par un algorithme quasi newtonien, en utilisant le principe de l'entropie maximale comme technique de régularisation. La méthode numérique des éléments analytiques (FA), associée à un schéma de calcul implicite à directions alternés (ADI), a été utilisée pour résoudre le problème direct correspondant. Cette formulation a été testée avec succès, sur des géométries 1D puis 3D, à partir des

données simulées par le modèle direct et artificiellement bruitées.

Les possibilités de la méthode d'inversion ici proposée ne sont limitées que par le temps de CPU nécessaire à la convergence de l'algorithme d'inversion, qui varie de façon plus que quadratique en fonction du nombre des paramètres inconnus du problème, et par la qualité des données expérimentales. Il a été vérifié expérimentalement [9] qu'il est possible de caractériser des défauts, dont la résistance d'interface correspond à un tiers de celle de la couche du milieu située en amont du plan du délaminage, à partir des variations de température de l'ordre du dixième de degré.

En bref, dans ce travail, il a été démontré la faisabilité de l'utilisation d'une approche tomographique, analogue à celle employée en imagerie médicale, pour la détection et la caractérisation de défauts, par thermographie infrarouge, dans les matériaux composites multicouches. Il reste cependant des progrès à faire au niveau de l'optimisation des temps de calcul, pour que cette technique d'inversion soit transposable et utilisable en milieu industriel.

Remerciements—Ce travail a été supporté en partie par une bourse CNPq/Brésil no. 92.0066-87.9. Il a été réalisé au Centre d'Etudes et de Recherches de Toulouse dans le Département d'Etudes et de Recherches en Mécanique et Ener-

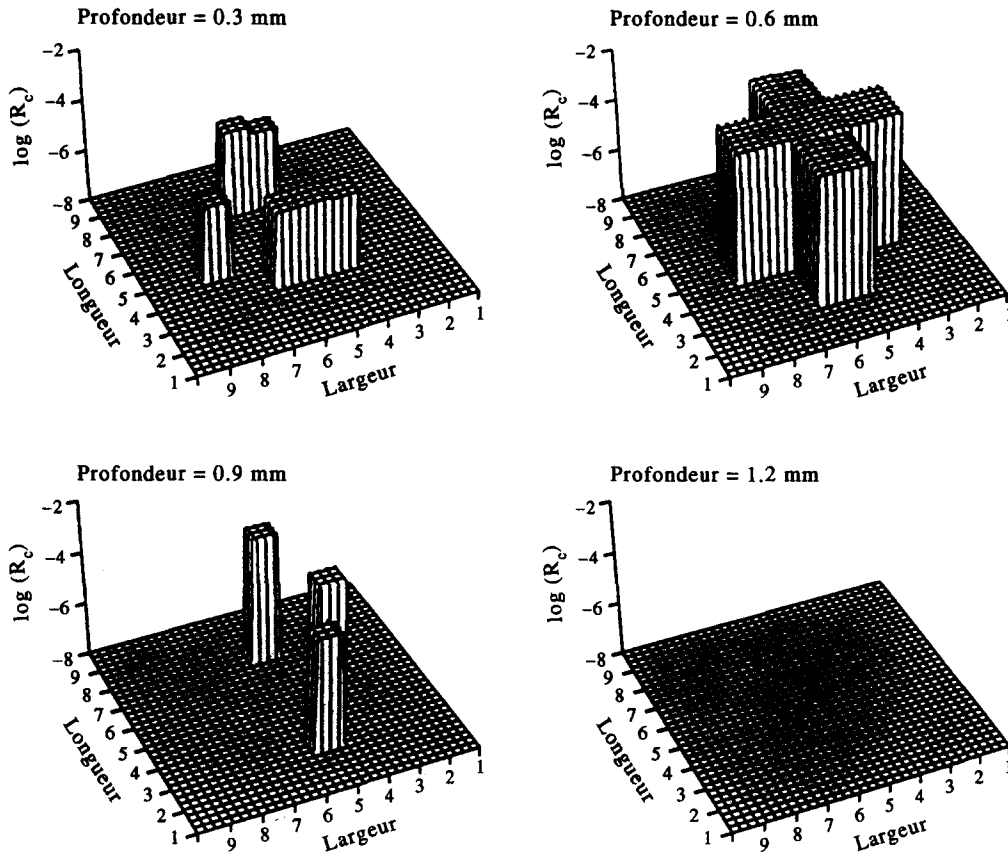


Fig. 9. Reconstruction après 250 itérations.

gétique des Systèmes et à l'École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace.

REFERENCES

1. J. P. Bardon, D. Balageas, A. Degiovanni and J. Vullierme, Thermique des matériaux composites et des interfaces: situation et perspectives, *Rech. Aéronautique* **6**, 37–45 (1989).
2. L. C. Aamodt, J. W. MacLachlan Spicer and J. C. Murphy, Analysis of characteristic thermal transit times for time-resolved infrared radiometry studies of multilayered coatings, *J. Appl. Phys.* **68**, 6087–6098 (1990).
3. W. P. Leung and A. C. Tam, Thermal conduction at a contact interface measured by pulsed photothermal radiometry, *J. Appl. Phys.* **63**, 4505–4510 (1988).
4. D. L. Balageas, Ph. Delpech, D. M. Boscher and A. A. Déom, New developments in stimulated infrared thermography applied to non-destructive testing of laminates. In *Review of Progress in Quantitative NDE* (Edited by D. O. Thompson and D. E. Chimenti). Plenum Press, New York (1991).
5. C.-J. Chen and H.-C. Chen, Finite analytic numerical method for unsteady two-dimensional Navier–Stokes equations, *J. Comput. Phys.* **53**, 209–226 (1984).
6. C.-J. Chen, M. Z. Sheikholeslami and R. B. Bhiladvala, Finite analytic numerical method for two-point boundary value problems of ordinary differential equations. *J. Comput. Meth. Appl. Mech. Engng* **75**, 61–76 (1989).
7. C.-J. Chen, Finite analytic method. In *Handbook of Numerical Heat Transfer* (Edited by W. J. Minkowycz, E. M. Sparrow, G. E. Schneider and R. H. Pletcher), Chap. 17, pp. 28–34. Wiley, New York (1988).
8. F. M. Ramos and A. Giovannini, Finite analytic numerical method for transient diffusion in layered composite materials, *Numer. Heat Transfer B* **22**, 305–319 (1992).
9. F. M. Ramos, Résolution d'un problème inverse multidimensionnel de diffusion par la méthode des éléments analytiques et le principe de l'entropie maximale: contribution à la caractérisation de défauts internes, PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse (1992).
10. F. M. Ramos and A. Giovannini, Diffusion instationnaire de la chaleur dans une structure multicouche 3d orthotrope: utilisation de la méthode numérique des éléments analytiques, *Colloque SFT92: Systèmes thermiques instationnaires*. Société Française des Thermiciens (1992).
11. N. N. Yanenko, *The Method of Fractional Steps*. Springer, Berlin (1971).
12. C. E. Shannon and W. Weaver, *The Mathematical Theory of Communication*. University of Illinois Press, Urbana, IL (1949).
13. E. T. Jaynes, Information theory and statistical mechanics, *Phys. Rev.* **106**, 620–630 (1957).
14. J. E. Shore and R. W. Johnson, An axiomatic derivation of the principle of maximum entropy and the principle of minimum cross-entropy. *IEEE Trans. Inf. Theory* **IT-26**, 26–37 (1980).
15. Y. Tikochinsky, N. Z. Tishby and R. D. Levine, Consistent inference of probabilities for reproducible experiments. *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1357–1360 (1984).
16. S. F. Gull and G. J. Daniell, Image reconstruction from incomplete and noisy data, *Nature* **272**, 686–690 (1978).
17. R. T. Smith, C. K. Zoltani, G. J. Klem and M. W. Coleman, Reconstruction of tomographic images from sparse data sets by a new finite element maximum entropy approach, *Appl. Optics* **30**, 573–582 (1991).

18. S. F. Burch, S. F. Gull and J. Skilling, Image restoration by a powerful maximum entropy method, *Comp. Vis. Graph. Image Process.* **23**, 113–128 (1983).
19. M. Fleischer, U. Mahlab and J. Shamir, Entropy optimized filter for pattern recognition, *Appl. Optics* **29**, 2091–2098 (1990).
20. M. de Boissieu, R. J. Papoular and C. Janot, Maximum entropy method as applied in quasi-crystallography. *Europhys. Lett.* **16**, 343–347 (1991).
21. NAG Fortran Library Mark 13, *User's Manual*, Vol. 4. NAG, Oxford (1988).

SOLUTION OF A MULTIDIMENSIONAL HEAT CONDUCTION INVERSE PROBLEM USING THE FINITE ANALYTIC METHOD AND THE PRINCIPLE OF MAXIMUM ENTROPY

A tomographic reconstruction technique of a 3D internal distribution of defects, from an incomplete and noisy data set, is presented. The associated direct problem is solved numerically by the finite analytic method, using an alternating direction implicit approach. A constrained optimisation algorithm together with a maximum entropy regularisation technique is used to solve the inverse problem. Numerical results, obtained from data sets simulated by the direct model and corrupted by Gaussian noise, demonstrate the good general performance of the proposed inversion method.